第 24 卷第 6 期　　重庆邮电大学学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 6
2012 年 12 月　　Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Natural Science Edition)　　Dec. 2012

DOI: 10. 3979/j. issn. 1673-825X. 2012. 06. 026

关于 F. Smarandache 函数与素因数和函数的一个混合均值

黄　炜
(宝鸡职业技术学院学院 基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘　要: 对于任意正整数 n ,若它的标准分解式是 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$,著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为: 存在最小的正整数 m ,使得 $n \mid m!$,即: $S(n) = \min\{m: n \mid m!, m \in N\}$,素因数和函数定义为: $\bar{\omega}(n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$,利用初等及解析的方法研究了 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 与素因数和函数 $\bar{\omega}(n)$ 的加权均值分布,得到了新混合函数 $S(n)\ \bar{\omega}(n)$ 的均值性质,并给出一个有趣的加权均值分布的渐近公式。

关键词: F. Smarandache 函数 $S(n)$; 素因数和函数 $\bar{\omega}(n)$; 混合均值; 渐近公式
中图分类号: O156. 4　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1673-825X(2012) 06-0804-03

Hybrid mean value of F. Smarandache function and the prime factor sum function

HUANG Wei
(Department of Basis Courses, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, P. R. China)

Abstract: For any positive integer n , $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ decomposes n into prime powers. The F. Smarandache $S(n)$ is defined as the smallest integer m such that $n \mid m!$. That is $S(n) = \min\{m: n \mid m!, m \in N\}$. The prime factor sum function is defined as: $\bar{\omega}(n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$,The main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the hybrid mean value problem involving the F. Smarandache function $S(n)$ and the prime factor sum function $\bar{\omega}(n)$. The mean value properties of this new hybrid function $S(n)\ \bar{\omega}(n)$ are obatained and the paper gives a sharper asymptotic formula for it.

Key words: F. Smarandache function $S(n)$; prime factor sum function $\bar{\omega}(n)$; hybrid mean value; asymptotic formula

0　引　言

对于任意的正整数 n ,著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为: $S(n) = \min\{m: n \mid m!, m \in N\}$,且该数列的前几项为: 1,2,3,4,5,3,7,4,6,5,11,4,13,7,5,6,17,6,19,5,7,… 。从 $S(n)$ 的定义和性质,很容易推断,对于任意正整数 n ,若它的标准素因数分解式是 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$,则有 $S(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$ 。

关于函数 $S(n)$ 的性质,不少学者进行了研究,获得了许多有趣的结果,文献 [2] 中研究了 $S(n)$ 的值分布性质,获得了较好结果: 设 $P(n)$ 表示 n 最大素因数,对于任意实数 $x > 1$,有均值公式

$$\sum_{n \leqslant x} (S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2}) x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}) \tag{1}$$

(1) 式中, $\zeta(\frac{3}{2})$ 为 Riemann Zeta 函数。

文献 [3] 也进行了研究,获得了下面更深刻的结果: 设 $k \geqslant 1$ 是给定的正整数,对于任意实数 $x > 1$,有均值公式

$$\sum_{n \leqslant x} S^k(n) = \frac{\zeta(k+1)}{k+1} \cdot \frac{x^{k+1}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right) \tag{2}$$

收稿日期: 2012-03-19　**修订日期:** 2012-10-25
基金项目: 国家自然科学基金(11071194) ; 陕西省自然科学基金(09JK432)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(11071194) ; The Natural Science Foundation of Shaanxi Province(09JK432)

文献 [4] 引入了素因数和函数 $\overline{\omega}(n)$: 即对于任意正整数 n ,若它的标准分解式是 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,令 $\overline{\omega}(n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$,则 $\overline{\omega}(n)$ 称为素因数和函数。例如: $\overline{\omega}(1) = 1$, $\overline{\omega}(2) = 2$, $\overline{\omega}(3) = 3$, $\overline{\omega}(4) = 2$, $\overline{\omega}(5) = 5$, $\overline{\omega}(6) = 5$, $\overline{\omega}(7) = 7$, $\overline{\omega}(8) = 2$, $\overline{\omega}(9) = 3$, $\overline{\omega}(10) = 7$, $\cdots$ 。显然,这个函数与 n 的不同的素因子个数 $\omega(n)$ 密切相关,也是可加函数,即就是对任意的正整数 m, n 有

$$\overline{\omega}(m\cdot n) = \overline{\omega}(m) + \overline{\omega}(n) \tag{3}$$

并对 $\overline{\omega}(n)$ 进行了研究,得到了它的均值公式为

$$\sum_{n\leqslant x}\overline{\omega}(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right) \tag{4}$$

本文研究了 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 与素因数和函数 $\overline{\omega}(n)$ 的混合均值分布,并给出一个有趣的均值分布的渐近公式,我们将证明以下结论。

定理　设 $k \geqslant 1$ 是给定的正整数,对于任意实数 $x > 1$,有下面的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)\,\overline{\omega}(n) = B\cdot\frac{x^3}{\ln x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right) \tag{5}$$

(5) 式中, $B = \frac{1}{3}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^3}$ 为可计算的常数。

1　引理及其证明

为了完成定理的证明,我们需要下面几个简单的引理。

引理 1　对于任意正整数 n ,若它的标准素因数分解式是 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子,则有以下结论。

1) 如果 $P > \sqrt{n}$,则: $S(n) = P(n)$;

2) 如果 $n = kp_1p_2$, $p_2 > p_1 > \sqrt[3]{n} > k$ 的 p_1, p_2 , k 两两互素,则 $S(n) = P(n)$;

3) 如果 $n = kp^2$,且 $p > \sqrt[3]{n} > k$,则 $S(n) = 2P(n)$ 。

证明见文献 [5] 。

引理 2　对于任何实数 $x \geqslant 1$,设 $\pi(x) = \sum_{p\leqslant n}1$,由 Abel 求和公式 [6] 及素数定理,有渐近公式

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) \tag{6}$$

证明见文献 [6] 。

引理 3　设 p 是素数,则有

$$\sum_{p\leqslant x}p^2 = \frac{1}{3}x^3 + O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right) \tag{7}$$

证明　由 Abel 求和公式 [6] 及引理 2 ,有

$$\sum_{p\leqslant x}p^2 = \int_{\frac{2}{3}}^{x}t^2\,\mathrm{d}\pi(t) = x^2\cdot\pi(x) - 2\int_{\frac{2}{3}}^{x}t\pi(t)\,\mathrm{d}t = x^2\left(\frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\right) - 2\int_{\frac{2}{3}}^{x}t\left(\frac{t}{\ln t} + O\left(\frac{t}{\ln^2 t}\right)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{x^3}{\ln x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right) \tag{8}$$

于是完成了引理 3 的证明。

2　定理的证明

在这一节,用初等及解析方法给出定理的证明。

将区间 [1, x] 中的正整数分成 2 个子集 A, B ,其中 A 是 [1, x] 中满足 $P(n) > \sqrt{n}$ 的整数 n 的集合, $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, B 是 [1, x] 中满足 $P(n) \leqslant \sqrt{n}$ 的整数 n 的集合; 显然根据 A, B 的定义,并注意到素因数和函数 $\overline{\omega}(n)$ 是可加函数,结合(2) 式有

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)\,\overline{\omega}(n) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}S(n)\,\overline{\omega}(n) + \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}S(n)\,\overline{\omega}(n) \tag{9}$$

下面逐一计算。

1) 对于任意的 $n \geqslant 1$, 且 $n \in A$,则 $n = mP(n) = mp$, $(m, p) = 1$, 且 $m < \sqrt{n} < p$, 由引理 1,则有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}S(n)\,\overline{\omega}(n) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n,\, p>\sqrt{n}}}S(n)\,\overline{\omega}(n) = \sum_{\substack{mp\leqslant x\\ p>m}}S(mp)\,\overline{\omega}(mp) = \sum_{\substack{mp\leqslant x\\ p>m}}p(p + \overline{\omega}(m)) = \sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}}p(p + \overline{\omega}(m)) = \sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}}p^2 + \sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}}p\,\overline{\omega}(m) \tag{10}$$

由 Abel 求和公式 [6] 及引理 3 有

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}}p^2 = \sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3}\frac{\left(\frac{x}{m}\right)^3}{\ln\frac{x}{m}} + O\left(\frac{x^3}{\ln^2\frac{x}{m}}\right) - \frac{1}{3}\frac{m^3}{\ln m} + O\left(\frac{m^3}{\ln^2 m}\right)\right) =$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3}\frac{x^3}{m^3\ln\frac{x}{m}} + O\left(\frac{x^3}{m^3\ln^2\frac{x}{m}}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{3}\frac{x^3}{\ln x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{m^3}\frac{\ln x}{\ln x - \ln m} + O\left(\frac{x^3}{m^3\ln^2 x}\frac{\ln^2 x}{(\ln x - \ln m)^2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{3}\frac{x^3}{\ln x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^3}\frac{1}{1 - \frac{\ln m}{\ln x}} + O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^3}\frac{1}{\left(1 - \frac{\ln m}{\ln x}\right)^2}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\frac{x^3}{\ln x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^3}\left(1+\frac{\ln m}{\ln x}+\frac{\ln^2 m}{\ln^2 x}+\cdots\right)+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^3}\left(1+2\frac{\ln m}{\ln x}+3\frac{\ln^2 m}{\ln^2 x}+\cdots\right)\right)=B\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right) \tag{11}$$

由引理 2 可推断

$$\sum_{n\leqslant x}\pi\left(\frac{x}{n}\right)\overline{\omega}(n)\ll\frac{x}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{\overline{\omega}(n)}{n}\ll x^{\frac{3}{2}} \tag{12}$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}}p\,\overline{\omega}(m)\leqslant\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sqrt{x}\pi\left(\frac{x}{n}\right)\overline{\omega}(n)\leqslant\sqrt{x}\frac{x}{\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{\overline{\omega}(n)}{n}\right)\ll x^{\frac{5}{2}}\ln x \tag{13}$$

结合(11)式,(13)式,有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}S(n)\overline{\omega}(n)=B\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right) \tag{14}$$

2) 若 $n\in B$,由(1)式及集合 B 的定义知,当 n 的标准分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,有 2 种情况: $S(n)=p\leqslant\sqrt{n}$,**或者** $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i p_i\}\leqslant p\ln n,\alpha_i\geqslant 2$ 。

由此分析,有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}S(n)\overline{\omega}(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x,p\mid n\\ p\leqslant\sqrt{n}}}S(n)\overline{\omega}(n)+\sum_{n\leqslant x,p^{\alpha_i}\mid n,\alpha_i\geqslant 2}S(n)\overline{\omega}(n)\ll\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n},\\ np\leqslant x}}\sqrt{np}\,\overline{\omega}(n)+\sum_{n\leqslant x,p^{\alpha_i}\mid n,\alpha_i\geqslant 2}(\alpha+1)S(p^{\alpha})\overline{\omega}(n)\ll\sum_{np\leqslant x}\sqrt{n}\ln n\,\overline{\omega}(n)\ll x^{\frac{5}{2}}\ln x \tag{15}$$

根据 1) 和 2) ,得到

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)\overline{\omega}(n)=B\cdot\frac{x^3}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right) \tag{16}$$

完成了定理的证明。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publ House, 1993: 78-90.

[2] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布[J]. 数学学报: 中文版, 2006, 49(5): 1009-1012.
XU Zhe-feng. On the Value Distribution of the Smarandache Function [J]. Acta Mathematics Sinica: Chinese series, 2006, 49(5): 1009-1012.

[3] 黄炜. Smarandache 复合函数的渐近公式[J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2011, 32(5): 9-10.
HUANG Wei. Smarandache Involving Function and Its Asymptotic Formula [J]. Journal of Jishou University: Natural Sciences Edition, 2011, 32(5): 9-10.

[4] 黄炜. 素因数和函数 $\overline{\omega}(n)$ 及其均值[J]. 河南科学, 2009, 27(9): 1031-1033.
HUANG Wei. Prime Factor Sum Function and Its Mean Value [J]. Journal of Henan Science, 2009, 27(9): 1031-1033.

[5] 李超, 杨存典, 刘端森. Smarandach 函数的均值分布性质[J]. 甘肃科学学报, 2010, 22(3): 24-27.
LI Chao, YANG Cun-dian, LIU Duan-sen. On the Average Value Distribution of the Smarandache Function [J]. Journal of Gansu Sciences, 2010, 22(3): 24-27.

[6] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 59-65.
PAN C D, PAN C B. Fou-dation of analytic number theory [M]. Beijing: Science Press, 1997: 59-65.

[7] TOM M A. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976: 134-170.

作者简介:



黄　炜(1961 -),男,陕西岐山人,中共党员,教授,研究生学历,1983 年 7 月毕业于陕西师范大学数学系基础数学专业。研究方向为解析数论、特殊函数及组合数学。现主要从事数论研究及高等数学教学工作,兼任陕西省数学学会会员、西北数论研究会会员,中国职业教育学会高职数学研究会委员,西部、东北部数学教学研究会常务理事,2009 年被宝鸡文理学院数学系聘为兼职教授。2010 年被评为宝鸡职业技术学院名师。在国外期刊、国际会议、中文核心及科技核心期刊等有影响的期刊上发表论文 40 余篇,其中,被国际权威检索 ISTP 收录 3 篇,被中国科学引文数据库(CSCD)收录 6 篇,有 6 篇文章被美国《数学评论》和中国《数学文摘》索引。参加国际学术会议 10 余次。参加省教育厅的科研项目二个,主持院级课题一项,主持编写了八本高教社及科学社的教材。E-mail: wphuangwei@163.com。

(**编辑:** 王敏琦)